

3. cvičení - teorie

Definice (Parciální derivace). Nechť f je funkce n proměnných, $i \in \{1, \dots, n\}$, $a \in \mathbb{R}^n$. Pak číslo

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}\end{aligned}$$

nazýváme **parciální derivací (prvního řádu) funkce f** podle j -té proměnné v bodě a (pokud limita existuje).

Značení. Derivaci funkce f podle j -té proměnné značíme mimo jiné také jako f'_{x_j} .

Parciální derivace počítáme v podstatě tak, že jiné proměnné, než je x_j bereme jako čísla.

Fakt. Aritmetika derivací proto funguje pořád stejně. Připomeňme, že dané vzorce platí, pokud napravo vyjde číslo!

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Definice. Funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v k -té proměnné v bodě $a \in \mathbb{R}^n$, pokud $\lim_{t \rightarrow 0} f(a + te_k) = f(a)$.

Věta 44 - ZS (Výpočet jednostranné derivace). Nechť reálná funkce f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$. Pak existuje $f'_+(a)$ a platí $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$. Levá strana analogicky.

Fakt. Je-li funkce f spojitá v bodě a v k -té proměnné, pak co se výpočtu $f'_k(a)$ týče, můžeme používat věty z minulého semestru - např. Větu 44 - ZS.

Definice (Tečná nadrovina). Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $a \in G$, $f \in \mathbb{C}^1(G)$. Pak graf funkce

$$T(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(a) \cdot (x_i - a_i)$$

je **tečná nadrovina** ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$.

Definice. Uvažme funkci $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Pak za **vrstevnici funkce f** považujeme množinu $[f = c]$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Návod

- určit a nakreslit $D(f)$, jaká je jeho hranice?
 - K nakreslení se může hodit: napsat si $D(f)$ jako konečné sjednocení/průnik množin tvaru $[y < g(x)]$, resp. $[y > g(x)]$, neb tyto množiny jsou vlastně plocha pod/nad grafem funkce g
- určit, zda je funkce definovaná po větvích - v tom případě si nakreslím množiny, na kterých má různé předpisy
- zjistím, zda a kde je funkce spojitá (potřeba např. k Větě 44 - ZS)
- ve vnitřních získaných množin vypočítám parciální derivace
- pokud je funkce na hranicích množin definována, spočtu zde derivace zvlášť - z definice/dle Věty 44 - ZS.
 - Aby parciální derivace dávala smysl, musí být funkce definována na úsečce procházející daným bodem v příhodném směru (např., pokud funkce není těsně nad bodem x definována, nemá smysl tam počítat derivaci podle y .)
- Tečná rovina: pokud jsou par. derivace spojitě, je definována.
 - Dosadím do předpisu $T(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(a)(x_i - a_i)$. Pokud chci graf T popsat rovnicí, tak v předpisu pro T místo $T(x)$ napíši x_{n+1} .

Může se hodit:

Věta 11. Nechť f je spojitá funkce na $\mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom platí:

- množiny $[f > c]$, $[f < c]$ jsou otevřené,
- množiny $[f \leq c]$, $[f \geq c]$, $[f = c]$ jsou uzavřené.